Groupe C

MATHÉMATIQUES

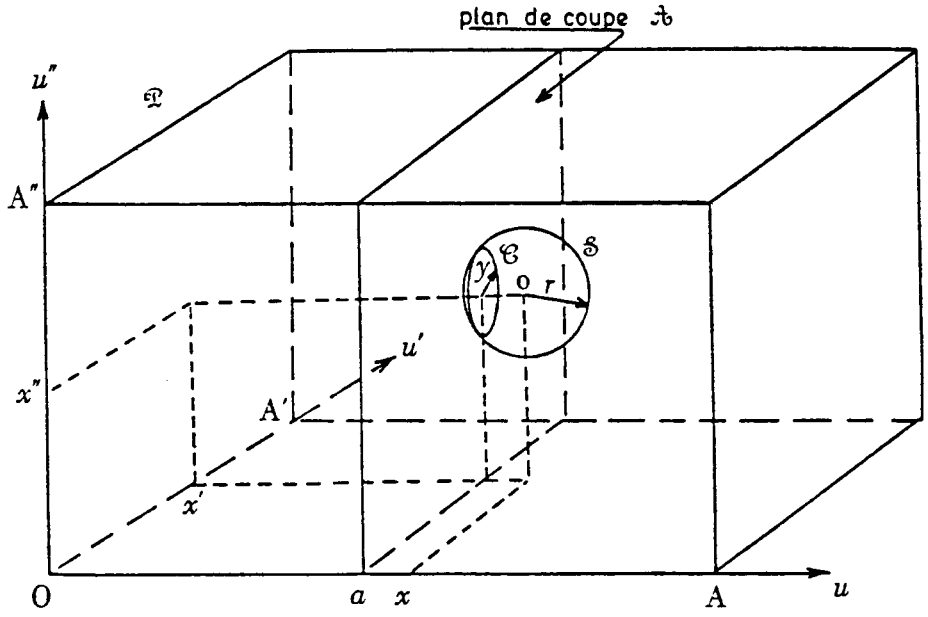
Durée : 4 heures

Ce sujet porte sur un modèle (simplifié) utilisé en microscopie quantitative, décrit en « Préambule ».

La question I.4° peut être traitée en admettant le résultat de I.3°*b*. Les parties II et III sont indépendantes, et utilisent uniquement le résultat final de I (formule notée (*) en I.4°); les deux questions de II sont indépendantes.

Quelques propriétés sont énoncées en « Appendice ». Pour chacune d'entre elles, une *Indication* est fournie dans l'énoncé la première fois qu'il y a lieu d'y avoir recours; le candidat veillera, s'il le fait, à bien justifier leur emploi.

Préambule



Une sphère $\mathcal{S}$, de rayon inférieur ou égal à 1, se trouve dans le parallélépipède $\mathfrak{P}$ de $\mathbb{R}^3$ (voir figure ci-dessus) :

$\mathfrak{P} = \{ (u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 ;\ 0 \leqslant u \leqslant A,\ 0 \leqslant u' \leqslant A',\ 0 \leqslant u'' \leqslant A'' \}$, où A, A′ et A″ sont supérieurs ou égaux à 4.

La sphère est repérée par son centre $o = (x, x', x'')$ et son rayon r, tous aléatoires et non directement observables.

x et r sont les valeurs prises par deux variables aléatoires, X et R, indépendantes; la loi de X est uniforme sur l'intervalle $[1, A - 1]$; la loi de R admet pour densité une fonction f continue de $[0, 1]$ dans $[0, +\infty[$.

Le moyen d'observation dont dispose l'expérimentateur consiste à faire une coupe du parallélépipède $\mathfrak{P}$ par le plan $\mathcal{A} = \{ (u, u', u'') \in \mathbb{R}^3 ;\ u = a \}$, où $2 \leqslant a \leqslant A - 2$.

On observe, si elle existe, la section de la sphère $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{A}$; c'est un cercle $\mathcal{C}$ dont le rayon y est la valeur prise par une variable aléatoire Y, qu'on appelle « rayon observé », par opposition au « rayon réel » R.

I

Le but de cette partie est de calculer, en fonction de la loi du rayon réel, la loi du rayon observé, conditionnellement à la rencontre de la sphère par le plan de coupe.

1° Sous quelle condition, portant sur le couple (x, r), le plan de coupe rencontre-t-il la sphère?

Quelle est dans ce cas la valeur y du rayon observé?

2° Dans le rectangle $[1, A - 1] \times [0, 1]$ (ensemble des valeurs possibles du couple (x, r)), représenter graphiquement :

- l'événement K : « le plan de coupe rencontre la sphère »;
- étant choisi t ($\in [0, 1]$), l'événement H_t : « la valeur du rayon observé est supérieure ou égale à t » (autrement dit l'événement $[Y \geqslant t]$).

3° *a*. Calculer :

- la probabilité de K (qu'on notera P (K)),
- la probabilité de H_t (qu'on notera P (H_t)).

Tournez la page S. V. P.

E.N.S. ULM-SEVRES Groupe C-

b. En déduire que la probabilité de H_t conditionnellement à K (qu'on note $P(H_t/K)$, ou $P_K(H_t)$) vaut :

$$\frac{\int_t^1 f(r)\sqrt{r^2-t^2}\,dr}{\int_0^1 r f(r)\,dr}.$$

4° L'application G de [0, 1] dans [0, 1] définie par :

$$G(t) = 1 - P(H_t/K)$$

sera appelée « fonction de répartition de la loi du rayon observé (Y), conditionnellement à la rencontre de la sphère par le plan de coupe ».

Le but de cette question est de démontrer que cette loi admet une densité (qu'on précisera).

a. y étant fixé dans [0, 1[, justifier la notation :

$$\int_y^1 \frac{f(r)}{\sqrt{r^2-y^2}}\,dr.$$

b. Démontrer qu'une condition suffisante pour qu'une fonction g, à valeurs positives ou nulles, soit la densité cherchée, est que, pour tout $t\ (\in]0, 1[)$ on ait $1 - G(t) = \int_t^1 g(y)\,dy$.

c. Démontrer qu'on peut prendre pour densité toute application g vérifiant, pour $0 < y < 1$,

$$(*) \qquad g(y) = \frac{y}{\int_0^1 r f(r)\,dr} \int_y^1 \frac{f(r)}{\sqrt{r^2-y^2}}\,dr.$$

Indication : Utiliser l'appendice (A).

II

Le but de cette partie est d'étudier, pour certaines lois du rayon réel (autrement dit pour certaines densités f), la loi, conditionnellement à la rencontre de la sphère par le plan de coupe, du rayon observé (autrement dit la densité g associée à f par la formule (*) ci-dessus).

On omettra désormais de préciser « conditionnellement à la rencontre de la sphère par le plan de coupe » et on parlera donc brièvement de « loi de Y », « fonction de répartition de Y » (c'est G), « densité de Y » (c'est g), ...

1° Dans cette question, la loi du rayon réel admet pour densité l'application f, de [0, 1] dans [0, 2], définie par $f(r) = 2r$.

a. Calculer $g(y)$ (pour $0 < y < 1$).

b. Étudier la variation de g et en donner une représentation graphique.

c. Calculer la fonction de répartition de Y.

d. Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y (il pourra être utile ici de se ramener à des calculs de primitives de polynômes en sinus et cosinus).

2° Dans cette question, la loi du rayon réel est la loi uniforme.

a. Calculer $g(y)$ (pour $0 < y < 1$).

b. On remarque que, si on note h la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $h(z) = \frac{1}{2} g\left(\frac{1}{z}\right)$, on a :

$$h(z) = \frac{1}{z} \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right).$$

Étudier la variation de h.

c. En déduire la représentation graphique de g; calculer, à 10^{-1} près, le point en lequel g prend son maximum, et qu'on appelle « mode de la loi de Y » (la technique de calcul est laissée à l'appréciation du candidat, mais doit être justifiée et expliquée; la valeur prise par g en ce point n'est pas demandée).

III

Le but de cette partie est d'étudier les possibilités d'inversion de la formule (*), c'est-à-dire, dans certains cas, de calculer la fonction f à partir de la fonction g.

On suppose ici que f admet une dérivée continue sur [0, 1], et vérifie $f(1) = 0$.

Soit g l'application de $]0, 1]$ dans $\mathbb{R}_+$ qui est associée à f par la formule (*) et qui vérifie de plus $g(1) = 0$.

On pose $h(y) = \frac{g(y)}{y}$ et $D = \int_0^1 r f(r)\,dr$.

Tournez la page S. V. P.

page 38 E.N.S. ULM-SEVRES
1987 Groupe C-

1° *a.* On note L la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$L(z) = \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

et on admet que c'est la fonction réciproque de la restriction à $[0, +\infty[$ de la fonction ch (cosinus hyperbolique).

Soit $0 < y < 1$; démontrer que :

$$\int_y^1 \frac{f(r)}{\sqrt{r^2 - y^2}}\, dr = \int_0^{L\left(\frac{1}{y}\right)} f(y \operatorname{ch} t)\, dt.$$

b. Soit Φ l'application, de $]0, +\infty[\times]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\Phi(u, v) = \int_0^u f(v \operatorname{ch} t)\, dt.$$

Calculer ses dérivées partielles $\Phi'_u(u, v)$ et $\Phi'_v(u, v)$.

Indication : Utiliser l'appendice (B).

c. En déduire, en tout y appartenant à $]0, 1[$, la dérivée de l'application h.

Indication : Utiliser l'appendice (C).

d. Démontrer que, si on prolonge l'application h au point 1 en posant $h(1) = 0$, on obtient une application admettant une dérivée continue sur $]0, 1]$.

2° *a.* Démontrer que :

$$\int_r^t \frac{dy}{y\sqrt{(y^2 - r^2)(t^2 - y^2)}} = \frac{\pi}{2rt}.$$

b. En déduire que, pour tout r appartenant à $]0, 1[$, on a :

$$(**) \qquad f(r) = \frac{-2D}{\pi}\, r \int_r^1 \frac{h'(y)}{\sqrt{y^2 - r^2}}\, dy.$$

3° En utilisant le fait que f est une densité de probabilité, exprimer D en fonction de h'.

4° Expliciter le résultat d'inversion obtenu.

Appendice

On admettra les propriétés énoncées ici, et auxquelles il a été fait référence dans le corps de l'énoncé.

(A) L'énoncé qui suit généralise, en utilisant des intégrales définies sur des intervalles ouverts, et absolument convergentes, une propriété de calcul des intégrales doubles connue dans le cas où on utilise des intégrales définies sur des segments.

Soit $c < d$, et soit Δ le domaine triangulaire de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\Delta = \{ (t, r) ; c < t < r < d \}$$

Soit φ une application continue de Δ dans $[0, +\infty[$; on suppose que, pour tout $t \in]c, d[$ l'intégrale $\int_t^d \varphi(t, r)\, dr$ est absolument convergente; soit $\psi(t)$ sa valeur; on suppose également que l'intégrale $\int_c^d \psi(t)\, dt$ est absolument convergente; alors on a :

$$\int_\Delta \varphi(t, r)\, dt\, dr = \int_c^d \left(\int_t^d \varphi(t, r)\, dr\right) dt = \int_c^d \left(\int_c^r \varphi(t, r)\, dt\right) dr,$$

et toutes les intégrales figurant dans le dernier terme de cette expression sont aussi absolument convergentes.

(B) Soit ψ une application à valeurs réelles, définie sur $[c, d] \times I$ (où $c < d$ et où I est un intervalle de $\mathbb{R}$), continue; alors l'application $\overline{\psi}$, définie sur I, par :

$$\overline{\psi}(v) = \int_c^d \psi(u, v)\, du$$

est continue; si de plus ψ est de classe C^1, l'application $\overline{\psi}$ admet en v la dérivée :

$$\overline{\psi}'(v) = \int_c^d \psi'_v(u, v)\, du,$$

et cette application dérivée est continue sur I.

(C) Soit Φ une application, à valeurs réelles, définie sur G, partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, de classe C^1. Soient φ et ψ deux applications à valeurs réelles, définies sur un même intervalle ouvert de I, admettant sur I des dérivées continues, et telles que, pour tout t appartenant à I, $(\varphi(t), \psi(t)) \in G$.

Alors l'application, de I dans $\mathbb{R}$,

$$t \longrightarrow \Phi(\varphi(t), \psi(t))$$

admet pour dérivée en t :

$$\Phi'_u(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t) + \Phi'_v(\varphi(t), \psi(t))\, \psi'(t)$$

et l'application dérivée ainsi définie est continue sur I.

• • •

E.N.S. ULM-SEVRES
Groupe C-
page 39
1987